

第2讲 一元二次方程的判别式和根系关系

一、一元二次方程的判别式

一元二次方程
判别式

对于方程 $ax^2 + bx + c = 0$
(a, b, c 为常数且 $a \neq 0$),
由配方法可得_____

当 $\Delta =$ _____, 方程有_____个_____的实数根

当 $\Delta =$ _____, 方程有_____个_____的实数根

当 $\Delta =$ _____, 方程_____实数根

【备注】对于方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 为常数且 $a \neq 0$)，由配方法可得

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

所以：①当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根

②当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根

③当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow$ 方程无实数根

！总结：

(1) 一元二次方程有实数根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ ，当 $\Delta = 0$ 时， $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ，由于是二次方程所以还是要称方程根的个数是2，即两个相等实数根（这里深层的原因是代数基本定理，但这是一个超出中学数学范围的定理，在此不作引申），教师讲解时要注意。

(2) 当 a, c 异号时，一元二次方程有两个不等实数根。

通过判断判别式 Δ 的符号得到方程根的个数情况，反过来也可以通过已知的方程根的个数得到 Δ 的正负。

🗨 举个“栗”子

栗子1

🗨 直接代入系数求解判别式

1. 一元二次方程 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 的解得情况是（ ）。

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法确定

【备注】直接求解 Δ ，根据正负判断根的情况

【答案】C

【解析】 $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8$.

$\therefore -8 < 0$,

$\therefore$ 原方程没有实数根 .

故选 : C .

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

栗子2

利用根的情况求解参数的范围

2. 若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 - 4x + 1 = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围是 _____ .

【备注】一元二次方程二次项系数不能为0; 一元二次方程有实数根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

! 注意:

此类型题的结果要注意范围中是否包含不等的关系, 比如: $\begin{cases} k \geq 3 \\ k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k \geq 3$

【答案】 $k \leq 5$ 且 $k \neq 1$

【解析】 $\therefore$ 一元二次方程 $(k-1)x^2 - 4x + 1 = 0$ 有实数根,

$\therefore k-1 \neq 0$, 且 $b^2 - 4ac = 16 - 4(k-1) \geq 0$,

解得: $k \leq 5$ 且 $k \neq 1$.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

3. 若关于 x 的方程 $kx^2 - 3x - \frac{9}{4} = 0$ 有实数根, 则实数 k 的取值范围是 () .

A. $k = 0$

B. $k \geq -1$ 且 $k \neq 0$

C. $k \geq -1$

D. $k > -1$

【备注】注意审题, 若关于 x 的方程, 则可以为一元一次方程 $\Rightarrow k = 0$, 也可以为一元二次方程

【答案】C

【解析】当 $k = 0$ 时, 方程化为 $-3x - \frac{9}{4} = 0$, 解得 $x = -\frac{3}{4}$,

当 $k \neq 0$ 时, $\Delta = (-3)^2 - 4k \times \left(-\frac{9}{4}\right) \geq 0$, 解得 $k \geq -1$,

所以 k 的范围为 $k \geq -1$.

故选C .

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

4. 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - \sqrt{2k+1}x - 1 = 0$ 没有实数根，那么 k 的取值范围是_____.

【备注】与二次根式结合，注意参数的取值范围，最终取不等式组的解集

【答案】 $-\frac{1}{2} \leq k < -\frac{1}{6}$

【解析】关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - \sqrt{2k+1}x - 1 = 0$ 没有实数根，

$$\therefore \begin{cases} k \neq 0 \\ 2k+1 \geq 0 \\ \Delta = (-\sqrt{2k+1})^2 + 4k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k \geq -\frac{1}{2} \\ k < -\frac{1}{6} \end{cases},$$

$\therefore k$ 的取值范围为 $-\frac{1}{2} \leq k < -\frac{1}{6}$.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

5. 已知 $ax^2 + bx + c = 0$ 与 $cx^2 + bx + a = 0$ 是两个关于 x 的一元二次方程，下列判断不正确的是().

- A. 如果方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个实数根，那么方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 也有两个实数根
- B. 如果 m 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根，那么 $\frac{1}{m}$ 是方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的一个根
- C. 如果方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 有一个根相等，那么这个根是1
- D. 如果方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 有一个根相等，那么这个根是1或-1

【备注】这道题要明确“如果…”相当于已知条件，我们要去判断“那么…”这部分是否一定成立；其中B、C、D选项的思路在后续二次函数图象与系数中还会考察，这部分要注意打好基础。

【答案】 C

【解析】 A 选项： $\because$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个实数

根，

$$\therefore b^2 - 4ac \geq 0,$$

$$\therefore b^2 - 4ca \geq 0,$$

$\therefore$ 方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 也有两个实数根，

故A正确；

B 选项： $\because m$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个

根， $c \neq 0$ ，

$$\therefore am^2 + bm + c = 0 \text{ 且 } m \neq 0,$$

$$\therefore c\left(\frac{1}{m}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{m} + a = 0,$$

$\therefore \frac{1}{m}$ 是 $cx^2 + bx + a = 0$ 的一根，

∴故B正确；

C 选项：由题意知， $a \neq c$ ，设相等的根是 m

,

则 $am^2 + bm + c = 0$ ①， $cm^2 + bm + a = 0$ ②，

①-②得 $am^2 - cm^2 + c - a = 0$ ，

∴ $(a - c)(m^2 - 1) = 0$ ，

∴ $a \neq c$ ，

∴ $a - c \neq 0$ ，

∴ $m = \pm 1$ ，

∴故C错误；

D 选项：根据选项C结论得，故D正确．

故选 C．

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

栗子3

判别式与方程的根综合

6. 已知，关于 x 的方程 $2x^2 - mx + n = 0$ ．

(1) 当 $m - n = 4$ 时，判断方程根的情况．

(2) 若方程有两个相等的实数根，当 $n = 2$ 时，求此时方程的根．

【备注】对于 $\Delta = b^2 - 4ac$ 是可以进行配方整理为 $x^2 + a(a \geq 0)$ 的形式，即可得到 $\Delta \geq 0$ ．

已知方程根的情况，求出参数的关系或值，再解方程．

【答案】(1) 一元二次方程 $2x^2 - mx + n = 0$ 有两个不相等的根．

(2) 1或-1．

【解析】(1) $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= (-m)^2 - 4 \times 2 \times n$$

$$= m^2 - 8n,$$

$$\because m - n = 4,$$

$$\therefore n = m - 4,$$

$$\Delta = m^2 - 8n$$

$$= m^2 - 8(m - 4)$$

$$= m^2 - 8m + 32$$

$$= (m-4)^2 + 16 ,$$

$$\therefore (m-4)^2 \geq 0 ,$$

$$\therefore (m-4)^2 + 16 > 0 ,$$

$$\therefore \Delta > 0 ,$$

即关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - mx + n = 0$ 有两个不相等的根 .

(2) 方程 $2x^2 - mx + n = 0$ 有两个相等的根 ,

$$\Delta = m^2 - 8n = 0 ,$$

$$\therefore n = 2 ,$$

$$\therefore m^2 - 8 \times 2 = 0 ,$$

$$m^2 = 16 ,$$

$$m = \pm 4 ,$$

$$m_1 = 4 , m_2 = -4 .$$

$$\textcircled{1} m_1 = 4 , n = 2 \text{ 时 ,}$$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0 ,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 ,$$

$$(x-1)^2 = 0 ,$$

$$x_1 = x_2 = 1 ;$$

$$\textcircled{2} m_1 = -4 , n = 2 \text{ 时 ,}$$

$$2x^2 + 4x + 2 = 0 ,$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 ,$$

$$(x+1)^2 = 0 ,$$

$$x_1 = x_2 = -1 .$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

7. 已知 , 关于 x 的方程 $(m-1)x^2 - (m-2)x + \frac{1}{4}m = 0$.

(1) 当 m 取何值时方程有一个实数根 ?

(2) 当 m 取何值时方程有两个实数根 ?

【备注】注意第 (1) 小问 , 方程有一个实数根是指该方程为一元一次方程 ; 当 $\Delta = 0$ 时 , 我们说一元二次方程有两个相等的实数根而不是一个。

【答案】 (1) $m = 1$.

(2) $m \leq \frac{4}{3}$, 且 $m \neq 1$.

【解析】 (1) 当 $m-1=0$, 即 $m=1$ 时 , 该方程为一元一次方程 ,

方程有一个实数根： $x = -\frac{1}{4}$.

(2) 当 $m - 1 \neq 0$, 即 $m \neq 1$ 时 , 该方程为一元二次方程 ;

当 $\Delta = [-(m-2)]^2 - 4(m-1) \times \frac{1}{4}m \geq 0$ 时 , 方程有两个实数根 ;

解得： $m \leq \frac{4}{3}$, 且 $m \neq 1$, 当 $m \leq \frac{4}{3}$, 且 $m \neq 1$ 时方程有两个实数根 .

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

栗子4

与三角形综合

8. 已知整数 $k < 5$, 若 $\triangle ABC$ 的边长均满足关于 x 的方程 $x^2 - 3\sqrt{k}x + 8 = 0$, 则 $\triangle ABC$ 的周长是 _____ .

【备注】与三角形进行结合 , 注意解方程后验证三角形三边关系是否满足

【答案】 6或12或10

【解析】 根据题意得： $k \geq 0$ 且 $(3\sqrt{k})^2 - 4 \times 8 \geq 0$,

解得 $k \geq \frac{32}{9}$,

$\because$ 整数 $k < 5$,

$\therefore k = 4$,

$\therefore$ 方程变形为 $x^2 - 6x + 8 = 0$,

解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 4$,

$\therefore \triangle ABC$ 的边长为2、2、2或4、4、4或4、4、2 ,

$\therefore$ 周长为6或12或10 .

故答案为：6或12或10 .

【标注】【知识点】与三角形三边关系结合

独步天下1

整数解问题

9. 已知：关于 x 的方程 $kx^2 - (4k+1)x + 3k+3 = 0$.

(1) 请说明：此方程必有实数根 .

(2) 若 k 为整数 , 且该方程的根都是整数 , 直接写出 k 的值 .

【备注】 如果 Δ 为完全平方公式 , 可以确定一点 , 方程的根可以直接求解 .

求解的方法有两种：因式分解法、公式法．

① 因式分解法：常用十字相乘法；

② 公式法：可以直接代入求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

求出解后，化成分子为常数的分式的形式，根据整数根，分子和分母的整除关系，求出符合题意的整数根．

用求根公式解整数根问题用到的方法是分离常数法，目的是把分子上的字母拆分出来，只讨论分母中的字母什么时候取值，能让式子变为一个整数．

！拓展：

① 若解得 $x = \frac{2}{k+1}$ ，则 $k+1 = \pm 1, \pm 2$ ，再求解．

② 若解得 $x = \frac{2k+2}{k}$ ，则化简为 $x = 2 + \frac{2}{k}$ ，则 $k = \pm 1, \pm 2$ ，再求解．

③ 若解得 $x = \frac{2k^2+2}{k}$ ，则化简为 $x = 2k + \frac{2}{k}$ ，则 $k = \pm 1, \pm 2$ ，再求解．

④ 若解得 $x = \frac{k^2+2}{k+1}$ ，则化简为 $x = \frac{k^2-1+3}{k+1} = \frac{k^2-1}{k+1} + \frac{3}{k+1} = k-1 + \frac{3}{k+1}$ ，则 $k+1 = \pm 1, \pm 3$ ，再求解．

⑤ 若解得 $x = \frac{2k^2+2}{k+1}$ ，则化简为

$x = \frac{2(k^2-1)+4}{k+1} = \frac{2(k+1)(k-1)}{k+1} + \frac{4}{k+1} = 2(k-1) + \frac{4}{k+1}$ ，则 $k+1 = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ ，再求解．

其中①、②较为常见，③、④、⑤可以给程度较好的学员进行拓展．

【答案】（1）证明见解析．

（2）0，1或-1．

【解析】（1）当 $k = 0$ 时，方程为一元一次方程，即 $-x + 3 = 0$ ，解得 $x = 3$ ，符合题意；

当 $k \neq 0$ 时，方程为一元二次方程，

其判别式 $b^2 - 4ac = (4k+1)^2 - 4k(3k+1) = (2k+1)^2 \geq 0$ ，恒有实数根，

综上所述，此方程必有实数根．

（2）① $k = 0$ 时，方程有根为3，符合题意；

② $k \neq 0$ 时，方程可化为 $(x-3)(kx-k-1) = 0$ ，

即 $x_1 = 3$ ， $x_2 = \frac{k+1}{k}$ ，

$x_2 = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}$ ，若 k 与方程根都是整数，则 k 只可以是1或-1，

综上所述， k 的值为0，1或-1．

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

二、一元二次方程的根系关系

探究：

从因式分解法可知，方程 $(x-x_1)(x-x_2)=0$ (x_1, x_2 为已知数)的两根为 x_1 和 x_2 ，将方程化为一般式后，你能说一说两个根和系数之间的关系吗？

【备注】将原方程化简可得： $(x-x_1)(x-x_2)=0 \Rightarrow x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$

设该一元二次方程的一般式为： $x^2+px+q=0$

所以 $x_1+x_2=-p$ ， $x_1x_2=q$ 。

上述探究针对于二次项系数为1的一元二次方程，现在我们拓展到一般式 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 中继续进行探究：

当 $\Delta \geq 0$ ，即方程有实数根，由 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 可知，

$$x_1+x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{c}{a}.$$

！总结：

因此，方程的两个根 x_1, x_2 和系数 a, b, c 有如下关系：

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

【备注】根与系数的关系即**韦达定理**：任何一个一元二次方程的根与系数的关系为：两个根的和等于一次项系数与二次项系数的比的相反数，两个根的积等于常数项与二次项系数的比。

！几个重要的变形：

$$\textcircled{1} x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2;$$

$$\textcircled{2} (x_1-x_2)^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2;$$

$$\textcircled{3} |x_1-x_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2} = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2};$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}.$$

根与系数关系常见应用场景：

1. 不解方程，求与方程的根有关的代数式的值；
2. 已知方程的一个根，求方程的另一个根；
3. 与根的判别式相结合，解决一些综合题。

 举个“栗”子

 栗子5

 直接利用根系关系计算

10. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+3x+m-1=0$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2 。

(1) 求 m 的取值范围。

(2) 若 $2(x_1+x_2)+x_1x_2+10=0$ ，求 m 的值。

【备注】直接表示出两边之和与两边之积，然后根据已知条件求出参数的值

【答案】 (1) $m \leq \frac{13}{4}$.

(2) -3 .

【解析】 (1) $\because$ 有两个实数根 .

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0 ,$$

$$\therefore 3^2 - 4 \times 1 \times (m - 1) \geq 0 ,$$

$$9 - 4m + 4 \geq 0 ,$$

$$-4m \geq -13 ,$$

$$m \leq \frac{13}{4} ,$$

$$\therefore m \text{ 的范围 : } m \leq \frac{13}{4} .$$

(2) $\because$ 方程有两个实数根 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -3 ,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m - 1 ,$$

$$\therefore \text{原式 : } 2 \times (-3) + (m - 1) + 10 = 0 ,$$

$$-6 + m - 1 + 10 = 0 ,$$

$$m = -3 ,$$

$$\therefore m \text{ 的值为 : } -3 .$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

栗子6

不解方程求方程的根

11. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根分别为 $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, 那么这个一元二次方程是 () .

A. $x^2 + 3x + 4 = 0$

B. $x^2 + 4x - 3 = 0$

C. $x^2 - 4x + 3 = 0$

D. $x^2 + 3x - 4 = 0$

【备注】利用根系关系验证每个方程是否满足

【答案】 C

【解析】 方程两根分别为 $x_1 = 3$, $x_2 = 1$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -p = 3 + 1 = 4 , x_1 x_2 = q = 3 ,$$

$$\therefore p = -4 , q = 3 ,$$

∴原方程为 $x^2 - 4x + 3 = 0$.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

12. 已知 $x_1 = 3$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + c = 0$ 的一个根，则方程的另一个根 x_2 是 _____ .

【备注】方程中已知“ a 、 b ”的值，则利用两根之和的关系，直接求出另一个根 .

【答案】 1

【解析】 设方程另一个根是 x_2 ,

则有： $3 + x_2 = 4$,

解得 $x_2 = 1$,

故另一个根是1 .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

13. 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$ 的一个根是0，则 a 的值为（ ） .

A. 1

B. -1

C. 1或-1

D. $\frac{1}{2}$

【备注】 已知方程的一个根为0，则 $x_1x_2 = \frac{c}{a} = 0$ ，求解参数的值，注意二次项系数不为0 .

【答案】 B

【解析】 ∵ $x = 0$ 是 $(a-1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$ 的一个根 .

∴ $a^2 - 1 = 0$, $a = \pm 1$,

∵方程是一元二次方程 ,

∴ $a - 1 \neq 0$,

$a \neq 1$,

则 $a = -1$.

故选：B .

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

栗子7

 韦达定理与方程的根综合

14. 已知 m , n 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根，则 $m^2 - mn + 3m + n =$ _____ .

【备注】先将方程的根代入，然后再利用韦达定理求解

【答案】8

【解析】 $\because m, n$ 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore mn = -5, m + n = -2.$$

$$\therefore m^2 + 2m - 5 = 0,$$

$$\therefore m^2 = 5 - 2m.$$

$$m^2 - mn + 3m + n = (5 - 2m) - (-5) + 3m + n$$

$$= 10 + m + n$$

$$= 10 - 2$$

$$= 8.$$

故答案为8.

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

15. 设 x_1, x_2 是二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两根，则 $x_1^3 - 4x_2^2 + 19$ 的值为（ ）.

A. 1

B. -1

C. 0

D. 2

【备注】求解高次代数式的思想：**降次**

此题涉及到立方和差公式： $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ；

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

【答案】C

【解析】 $\because x_1, x_2$ 是二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两根，

$$\therefore x_1^2 + x_1 = 3, x_2^2 = 3 - x_2, x_1 + x_2 = -1,$$

$$\therefore x_1^3 - 4x_2^2 + 19 = x_1^3 - 1 - 4x_2^2 + 20$$

$$= (x_1 - 1)(x_1^2 + x_1 + 1) - 4(3 - x_2) + 20$$

$$= (x_1 - 1)(3 + 1) - 4(3 - x_2) + 20$$

$$= 4(x_1 - 1) - 4(3 - x_2) + 20$$

$$= 4(x_1 + x_2) + 4$$

$$= -4 + 4$$

$$= 0.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

 根系关系的变形

16. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx - 1 = 0$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 = 7$, 则 $(x_1 - x_2)^2$ 的值是 () .
- A. 1 B. 12 C. 9 D. 25

【备注】 此题需要利用完全平方公式与根系关系进行变形： $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - mx - 1 = 0$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = m, x_1x_2 = -1,$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2 \times (-1) = m^2 + 2 = 7,$$

$$m_1 = \sqrt{5}, m_2 = -\sqrt{5},$$

$\therefore$ 方程有2个实数根,

$$\therefore \Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = m^2 + 4 > 0 \text{ 恒成立},$$

$$\therefore m_1 = \sqrt{5}, m_2 = -\sqrt{5} \text{ 均满足条件},$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = m^2 - 4 \times (-1) = 5 + 4 = 9.$$

故选C.

【标注】 **【知识点】** 一元二次方程根与系数的关系

17. 已知 x_1, x_2 是方程 $2x^2 - 5x + 1 = 0$ 的两实数根, 求下列各式的值:

(1) $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$.

(2) $(x_1 - x_2)^2$.

(3) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$.

【备注】 (1) 需要先利用提取公因式法进行因式分解, 讲解时可以再复习下因式分解的方法:

①提取公因式法 ②乘法公式法 ③十字相乘法 ④分组分解法

(2) 利用两个完全平方公式的等量关系求解： $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

(3) 利用分式加减的运算法则计算：先通分，然后分子相加减

【答案】 (1) $\frac{5}{4}$.

(2) $\frac{17}{4}$.

(3) $\frac{21}{2}$.

【解析】 (1) $\because x_1, x_2$ 是方程 $2x^2 - 5x + 1 = 0$ 的实数根,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, x_1 x_2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2$$

$$= x_1 x_2 (x_2 + x_1)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{2}$$

$$= \frac{5}{4}.$$

$$(2) (x_1 - x_2)^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{25}{4} - 2$$

$$= \frac{17}{4}.$$

$$(3) \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{25}{4} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{21}{2}.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

18. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 2 = 0$.

(1) 若方程有实数根, 求实数 m 的取值范围.

(2) 若方程两实数根分别为 x_1 、 x_2 , 且满足 $x_1^2 + x_2^2 = 31 + |x_1 x_2|$, 求实数 m 的值.

【备注】此题中出现了 $|x_1 x_2|$, 根据 $|x_1 x_2| = m^2 + 2 \geq 0$, 解方程即可.

【答案】(1) $m \geq -\frac{1}{12}$.

(2) $m = 2$

【解析】(1) $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 2 = 0$ 有实数根,

$$\therefore \Delta \geq 0, \text{ 即 } (2m + 3)^2 - 4(m^2 + 2) \geq 0,$$

$$\therefore m \geq -\frac{1}{12}.$$

(2) 根据题意得 $x_1 + x_2 = 2m + 3$, $x_1 x_2 = m^2 + 2$,

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = 31 + |x_1 x_2|,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 31 + |x_1 x_2|,$$

$$\text{即}(2m+3)^2 - 2(m^2+2) = 31 + m^2 + 2,$$

$$\text{解得} m = 2, m = -14 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore m = 2.$$

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

栗子9

逆用一元二次方程的定义构造方程

19. 若实数 $a \neq b$, 且 a, b 满足 $a^2 - 8a + 5 = 0$, $b^2 - 8b + 5 = 0$, 则代数式 $\frac{b-1}{a-1} + \frac{a-1}{b-1}$ 的值为 ().
- A. -20 B. 2 C. 2或-20 D. 2或20

【备注】若两个参数同时满足一个相同类型 (除未知数外其余完全相同) 的方程, 则可得到这两个参数为该方程的两根, 然后利用韦达定理推导即可.

【答案】 A

【解析】 $\because a, b$ 满足 $a^2 - 8a + 5 = 0$, $b^2 - 8b + 5 = 0$,

$\therefore a, b$ 可看作方程 $x^2 - 8x + 5 = 0$ 的两根,

$$\therefore a + b = 8, ab = 5,$$

$$\begin{aligned} \frac{b-1}{a-1} + \frac{a-1}{b-1} &= \frac{(b-1)^2 + (a-1)^2}{(a-1)(b-1)} \\ &= \frac{(a+b)^2 - 2ab - 2(a+b) + 2}{ab - (a+b) + 1} \\ &= \frac{8^2 - 2 \times 5 - 2 \times 8 + 2}{5 - 8 + 1} \\ &= -20. \end{aligned}$$

故选 A.

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

20. 若 $ab \neq 1$, 且有 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$ 及 $9b^2 + 2001b + 5 = 0$, 则 $\frac{a}{b}$ 的值为 ____.

【备注】此题可先观察两个方程的异同点: 一次项系数相同, 二次项系数与常数项呈对称关系, 则通过方程左右两侧同除以 b^2 化为相同方程, 然后再进行构造

【答案】 $\frac{9}{5}$

【解析】 由 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$ 可知, $a \neq 0$, 故 $9\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 2001 \cdot \frac{1}{a} + 5 = 0$.

又 $9b^2 + 2001b + 5 = 0$, $ab \neq 1 \Rightarrow a \neq \frac{1}{b}$, 故 $b, \frac{1}{a}$ 是方程 $9x^2 + 2001x + 5 = 0$ 的两根, 从而可知 $b \cdot \frac{1}{a} = \frac{5}{9}$, 则 $\frac{a}{b} = \frac{9}{5}$.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

栗子10

逆用根系关系构造方程

21. 设 $x^2 - px + q = 0$ 的两实数根为 α, β , 那么 α^2, β^2 为两根的一元二次方程是 _____.

【备注】先根据题中方程求解出根系的关系, 再利用韦达定理的变形推导出 $\alpha^2 + \beta^2, \alpha^2\beta^2$ 的值

【答案】 $x^2 - (p^2 - 2q)x + q^2 = 0$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

独步天下2

22. 已知 x, y 均为实数, 且满足 $xy + x + y = 17$, $x^2y + xy^2 = 66$. 求 $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$ 的值.

【备注】对于复杂的根系关系可利用换元法求解: 令 $u = x + y, t = xy$, 构造一个以 u, t 为两根的方程, 解方程求出 u, t 的值, 然后利用降次思想求出代数式的值

【答案】12499

【解析】由已知 $xy + x + y = 17, x^2y + xy^2 = 66$,

所以 xy 和 $x + y$ 是方程 $t^2 - 17t + 66 = 0$ ① 的两个实数根.

解方程①得 $t_1 = 6, t_2 = 11$. 即 $xy = 6, x + y = 11$; 或者 $xy = 11, x + y = 6$.

当 $xy = 6, x + y = 11$ 时, x, y 是方程 $u^2 - 11u + 6 = 0$ ② 的两个根.

因为 $\Delta_1 = (-11)^2 - 4 \times 6 > 0$, 所以方程②有实数根.

这时 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 11^2 - 2 \times 6 = 121 - 12 = 109$.

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = x^4 + y^4 + x^2y^2 + x^3y + xy^3$$

$$= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 + xy(x^2 + y^2)$$

$$= 109^2 - 6^2 + 6 \times 109 = 12499.$$

当 $xy = 11, x + y = 6$ 时, x, y 是方程 $v^2 - 6v + 11 = 0$ ③ 的两个根.

因为 $\Delta_2 = (-6)^2 - 4 \times 11 < 0$, 所以方程③没有实数根.

综上所述 $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$ 的值为 12499.

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式